

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УМАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ САДІВНИЦТВА
ФАКУЛЬТЕТ ПЛОДООВОЧІВНИЦТВА ЕКОЛОГІЇ ТА ЗАХИСТУ
РОСЛИН
Кафедра екології та безпеки життєдіяльності**

Моделювання і прогнозування стану довкілля

Методичні рекомендації до виконання курсових робіт студентами денної форми навчання спеціальності 101 «Екологія» ОР «Бакалавр»

Умань 2021

Методичні рекомендації до виконання курсових робіт студентами денної форми навчання з дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 101 «Екологія»

Укладач: кандидат сільськогосподарських наук, доцент Василенко О.В., кандидат сільськогосподарських наук, ст. викладач Сорока Л. В.

Рецензент: доктор сільськогосподарських наук, професор Улянич О.І.

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри екології та безпеки життєдіяльності (протокол N 1 від 31 серпня 2021 р.)

Схвалено науково-методичною комісією факультету плодоовочівництва, екології та захисту рослин (протокол № 1 від 31 серпня 2021 р.)

© Сорока Л.В., 2021
Василенко О.В., 2021
© Уманський НУС, 2021

<u>ВСТУП</u>	5
<u>1. КУРСОВІ ЗАВДАННЯ. ОСНОВНІ ТЕМИ І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ</u>	7
<u>1.1. КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 1. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.</u>	7
<u>1.2. КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 2. КІНЕТИКА ХІМІЧНОЇ РЕАКЦІЇ.</u>	11
<u>1.3. КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 3. НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ.</u>	16
<u>1.4. КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 4. МОДЕЛЮВАННЯ ЧИСЕЛЬНОСТІ ПОПУЛЯЦІЇ.</u>	20
<u>1.5. КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 5. ШВИДКІСТЬ ІНФІЛЬТРАЦІЇ ВОДИ В ҐРУНТ.</u>	24
<u>1.6. КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 6.</u>	29
<u>2. ВИБІР ВАРІАНТА ЗАВДАННЯ І ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ.</u>	34
<u>3. ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.</u>	35
<u>3.1. ЗАДАЧА РОЗРАХУНКУ ПРОМЕРЗАННЯ ҐРУНТУ.</u>	35
<u>3.2. ЕКОСИСТЕМА «КРОЛИКИ-ЛИСИЦІ».</u>	35
<u>3.3. ОЗОН В АТМОСФЕРІ.</u>	36
<u>4. ЛІТЕРАТУРА.</u>	38
<u>5. ДОДАТОК 1. КОМП'ЮТЕРНА ПРОГРАМА ЧИСЕЛЬНОГО РІШЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ</u>	39
<u>6. ДОДАТОК 2 КОМП'ЮТЕРНІ ПРОГРАМИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ</u>	40

ВСТУП

Сучасна наука характеризується глибоким проникненням математичних методів у її різні галузі. Істотно зростає роль математики в розвитку сучасної біології, географії та ін. Майбутні екологи потребують серйозної математичної підготовки, яка давала б можливість математичними методами й прийомами досліджувати широке коло нових проблем, застосовувати обчислювальну техніку, використовувати теоретичні дослідження в практиці.

Найбільш важливим етапом застосування математики в екологічних дослідженнях, слід вважати процес побудови адекватної математичної моделі об'єкта або системи, що вивчається.

Усяке пізнання, у тому числі наукове, починається з простого споглядання, у процесі якого накопичується емпірична інформація про об'єкт досліджень. Просте споглядання дає змогу описати зовнішні прояви феномену, за яким ведеться спостереження; проте цей спосіб пізнання рідко коли дозволяє проникнути глибоко в сутність речей, тобто зрозуміти природу й пізнати закономірності тих прихованих внутрішніх процесів, що спричиняють зміну форми існування об'єкта.

З цих причин у випадку дослідження явищ природи і людського суспільства, що розвиваються за складними й заплутаними законами, просте споглядання не дозволяє зробити надійний довгостроковий прогноз поведінки об'єкта спостереження і його реакції на зовнішні впливи. Для глибокого пізнання таких явищ часто виявляється доцільним розкласти його, принаймні подумки, на окремі складові — прості субпроцеси — й вивчити властивості кожної з них окремо. Такий метод пізнання називають аналізом об'єкта.

З іншого боку, явище природи чи суспільства, розкладене на складові частини, вже не може бути тотожним самому собі через неодмінну втрату зв'язку між субпроцесами. Відповідно, одного аналізу об'єкта досліджень не досить для точного, детального передбачення законів його майбутнього розвитку. Для того, щоб вивчити явище (об'єкт) достатньою мірою, необхідно зрозуміти взаємини окремих його складових одне з одним, тобто знову з'єднати їх подумки в одне ціле і відтворити вихідне явище в цілому. Цю процедуру називають синтезом об'єкта досліджень.

Якщо в процесі розчленовування об'єкта на прості субпроцеси знехтувати тією частиною з них, які не істотні для формування тих чи інших його характеристик, то після повторного синтезу ми одержимо вже новий об'єкт, що відрізняється певним чином від початкового об'єкта — так званого прототипу.

Об'єкт пізнання, отриманий у результаті аналізу і синтезу об'єкта-прототипу, називають моделлю об'єкта дослідження.

Модель – це речова, знакова або уявна (мислена) система, що відтворює, імітує, відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи(та) характеристики об'єкта дослідження (оригіналу).

Очевидно, що модель завжди простіша за прототип, оскільки внаслідок розчленування його на компоненти частиною зв'язків і компонентів, що вважаються малозначними, свідомо нехтують, піклуючись лише про збереження найважливіших із них. Вивчивши властивості спрощеної моделі, переносять основні з них на об'єкт-прототип. Зіставляючи далі висновки досліджень моделі з результатами спостереження за прототипом, роблять відповідні висновки про адекватність (ступінь тотожності) моделі й прототипу, в разі потреби коригуючи модель за наслідками такого зіставлення.

Моделювання (екологічне)— це метод вивчення складних екологічних об'єктів (реальних і абстрактних) на умовних образах, схемах, фізичних конструкціях, аналогічних досліджуваному об'єкту за будовою чи типом поведінки, із застосуванням методів аналогії, теорії подібності й теорії обробки даних експерименту.

Моделювання сьогодні є одним з головних способів, головною методологією пізнання Людиною суті природних та суспільних явищ різного рівня складності. Цей метод набув повсюдного поширення у XIX-XX ст.; його можна зустріти в усіх галузях науки і техніки. Особливо широкого поширення він набув у зв'язку з розвитком обчислювальної техніки, що дала змогу створювати комп'ютерні моделі. Яскравим прикладом таких моделей є загальновідома "віртуальна реальність".

Ціль виконання роботи: на прикладі різних типів екологічного моделювання показати можливість моделювання різних екосистем з використанням методів прикладної математики, математичної статистики

й оптимізації, включаючи при цьому не тільки складання математичних моделей, але і реалізацію їх за допомогою алгоритмів і комп'ютерних програм алгоритмічною мовою Турбо-Паскаль, опанувати методами реалізації програм на персональних комп'ютерах PC/AT.

Курсові завдання. Основні теми і методичні вказівки

КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 1. Лінійне програмування.

У багатьох додатках прикладної екології, біології виникає задача максимізації або мінімізації основних характеристик екосистеми в залежності від заданих обмежень. Ці обмеження можуть бути наслідком фізіологічних меж або меж життєвих ресурсів. Наприклад, швидкість розмноження даного виду може бути обмежена тривалим періодом вагітності або доступним простором і їжею. У випадку, якщо основні залежності параметрів досліджуваної екосистеми носять лінійний характер, то дана задача може бути зведена до максимізації або мінімізації лінійної функції декількох перемінних при наявності лінійних обмежень.

Дано: Гірське озеро заселяється кожної весни двома видами риб S_1 і S_2 . Нехай маса одного виду риб дорівнює M_1 (кг), а другого M_2 (кг). В озері мається два види їжі F_1 і F_2 . Середні потреби однієї риби виду S_1 складають N_1 одиниць корму F_1 і N_2 одиниць корму F_2 у день. Аналогічні потреби для S_2 складають N_3 одиниць корму F_1 і N_4 одиниць корму F_2 у день. Загальний запас корму в озері підтримується на рівні N_5 одиниць корму F_1 і N_6 одиниць корму F_2 у день.

Визначити:

- а) Як варто заселити озеро, щоб максимізувати загальну чисельність двох видів риб?
- б) Як варто заселити озеро, щоб максимізувати загальну масу двох видів риб?
- в) Знайти чисельність видів риб, які можуть співіснувати при загальній масі M_3 (кг) ?

ВКАЗІВКИ ДО РІШЕННЯ.

Припустимо, в озері x_1 риб виду S_1 і x_2 риб виду S_2 (відзначимо що, x_1 і x_2 -числа цілі і ненегативні). У день риби виду S_1 споживають $N_1 \cdot x_1$ корму F_1 і $N_2 \cdot x_1$ корму F_2 , а риби виду S_2 поглинають $N_3 \cdot x_2$

корму F1 і $N4 \cdot x2$ корму F2. Усього за день споживається $x1 \cdot N1 + x2 \cdot N3$ корму F1, і $x1 \cdot N2 + x2 \cdot N4$ корму F2, що складає відповідно $N5$ і $N6$ одиниць корму.

Будемо вважати, що $M1 = 2$; $M2 = 4.5$; $N1 = 1$; $N2 = 3$; $N3 = 4$; $N4 = 3$; $N5 = 800$; $N6 = 900$; $M3 = 720$. Формуємо систему нерівностей:

$$\left. \begin{array}{l} x1 \cdot N1 + x2 \cdot N3 \leq N5, \\ x1 \cdot N2 + x2 \cdot N4 \leq N6. \end{array} \right\} \begin{array}{l} x1 + 4 \cdot x2 \leq 800, \\ 2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \leq 900. \end{array} \quad (1.1.1)$$

Максимальна чисельність і маса будуть при рівності:

$$\left. \begin{array}{l} x1 \cdot N1 + x2 \cdot N3 = N5, \\ x1 \cdot N2 + x2 \cdot N4 = N6. \end{array} \right\} \quad (1.1.2)$$

1. Знайдемо максимальну чисельність ($x1$ та $x2$).

Виразимо $x1$ з першого рівняння:

$$x1 = \frac{N5 - N3 \cdot x2}{N1}, \text{ підставимо в друге: } x2 = \frac{N6 \cdot N1 - N2 \cdot N5}{N1 \cdot N4 - N2 \cdot N3} = 140$$

Отриманий результат не суперечить умові. Розрахуємо $x1$ з першого рівняння: $x1 = 240$.

2. Знайдемо загальну максимальну масу.

Максимальна маса M_{\max} буде при максимальній чисельності. Якщо риби виду S1 в озері $x1$ штук, то вони важать $M1 \cdot x1$ (кг), і якщо риби виду S2 $x2$ штук, то вони важать $M2 \cdot x2$ (кг).

Знайдемо M_{\max} . $M_{\max} = x1 \cdot M1 + x2 \cdot M2 = 240 \cdot 2 + 140 \cdot 4,5 = 1110,0$ кг

Також максимальна маса може досягатися при відсутності одного з видів риби. Розглянемо ці два випадки.

а). $x1 = 0$; $x2 = 200$; $M_{\max} = 900$ кг. б). $x1 = 440$; $x2 = 0$; $M_{\max} = 880$ кг.

Таким чином, ми одержали максимальну масу $M_{\max} = 1110$ кг.

3. Загальна кількість риби при $M3 = 720$ кг.

Кількість риби обох видів при загальній масі $M3 = 720$ кг можливо визначити по рівнянню $2 \cdot x1 + 4,5 \cdot x2 = 720$, з обмеженням (1.1.1). Можна помітити, що дана маса менше максимально можливої. Звідси робимо висновок, що можливо заселити озеро даними видами риби і досягти загальної маси 720 кг. Наведений алгоритм нескладно програмується та Турбо-Паскалі [4].

ГРАФІЧНЕ РІШЕННЯ.

Дану задачу можна вирішити геометрично. Виберемо систему

Координата точки A-(240,140); Координата точки B-(450,0);
Координата точки C-(0,200);

З графіка також видно, що пряма $2 \cdot X_1 + 4,5 \cdot X_2 = M_3$ перетинає область співіснування розглянутих видів. Отже, заселити озеро даними видами риб і досягти загальної маси $M_3 = 720$ кг можливо.

Пряма $X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 = M_{\max}$ проходить через крапку А, отже максимальна маса досягається в цій крапці і дорівнює $M_{\max} = 1110$ кг.

Варіанти робіт для контрольного завдання 1

№	M1	M2	M3	N1	N2	N3	N4	N5	N6
1	1	2,5	500	2	3	4	1	500	600
2	2	1,5	405	1	5	4	2	800	500
3	1	3,5	450	2	2	5	1	700	400
4	1	2,5	500	1	2	4	1	500	600
5	3	1,5	360	1	3	2	1	300	500
6	1	0,5	470	1	4	5	1	500	700
7	1	1,5	280	2	4	4	1	900	800
8	0,5	1	390	2	3	4	3	500	600
9	1	4	300	1	2	3	2	600	700
10	1,5	1	510	2	3	2	1	750	800
11	2	4,5	720	1	2	4	3	800	900
12	2,5	5	530	1	2	3	2	600	800
13	3	0,5	340	2	4,5	2	1	400	900
14	3,5	1,5	350	1	3	2	1	500	700
15	4	2	460	2	3	3	1	600	750
16	4,5	0,5	670	1	2,5	1	0,5	600	800
17	5	1	180	1,5	4	4	1	800	250
18	7	1	300	1,5	2	2	1	500	600
19	2	7	710	1	5	9	7	900	800
20	3	5	620	4	7	9	6	900	850
21	1	2,5	400	2	1	4	1	500	600
22	1	3,5	450	2	2	5	1	700	400
23	3	1,5	360	1	3	2	1	300	500

Додаткові варіанти робіт для контрольного завдання 1

отримати у викладача.

КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 2. Кінетика хімічної реакції.

Кінетикою хімічної реакції називається вчення про швидкості їхнього протікання і залежності її від різних факторів (концентрації реагуючих речовин, температури, впливу каталізаторів і ін.). Вивчення кінетики реакції представляє великий практичний і теоретичний інтерес. При практичному використанні будь-якої реакції швидкість, з якою вона протікає, відіграє дуже велику роль. Так, від швидкості реакції, при розпаді забруднювача, буде залежати час очищення території зони аварії.

Теоретичне значення питань кінетики полягає в тім, що вивчення їх дозволяє з'ясувати багато важливих деталей хімічних процесів і глибше зрозуміти механізм взаємодії речовин.

Кількісно *швидкість хімічної реакції прийнято характеризувати зміною концентрації реагуючих речовин в одиницю часу*. Власне кажучи, байдуже, концентрацію якої з реагуючих речовин розглядати. Концентрація вихідних речовин буде зменшуватися, а одержуваних - зростати.

Можна оперувати кінцевими змінами концентрації C_2-C_1 , що відносяться до проміжку часу t_2-t_1 , визначаючи таким шляхом *середню швидкість V реакції* за даний проміжок часу:

$$V := \frac{C_2 - C_1}{t_2 - t_1} \quad (1.2.1)$$

Або, з іншого боку, можна відносити зміну концентрації до нескінченно малого проміжку часу, визначаючи миттєву швидкість V реакції в даний момент, похідну від концентрації за часом:

$$V := \frac{dC}{dt} \quad (1.2.2)$$

Швидкість реакції завжди вважається позитивною. Тому, якщо розглядати концентрації вихідних продуктів, то праву частину рівнянь (1.2.1) і (1.2.2) слід брати зі знаком мінус.

Часом напіврозпаду називають час, за який прореагує половина вихідної речовини, тобто $C=0.5C_0$.

Запишемо рівняння швидкості:

$$V = kC^n \quad (1.2.3)$$

Де n -порядок реакції.

Концентрація змінюється від C_0 до C , а час – від t_0 до t . Знайдемо залежності концентрацій від часу для реакції нульового порядку $n=0$, тобто запишемо рівняння нульового порядку, що вирішимо методом поділу змінних:

$$\frac{dC}{d\tau} = -kC^0$$

$$dC = -kd\tau$$

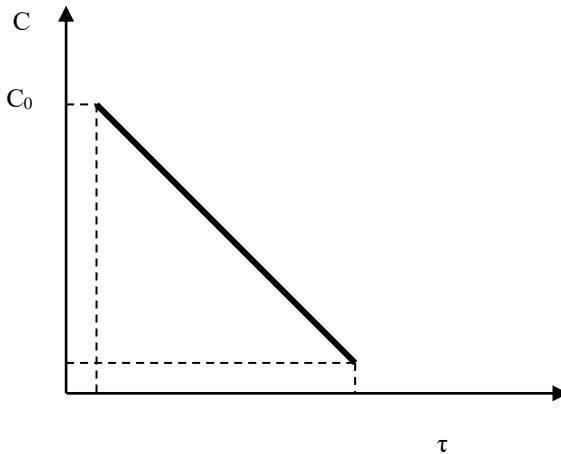
Проінтегруємо рівняння, ліву частину від C_0 до C , а праву від 0 до τ , одержимо:

$$-\int_{C_0}^C dC = k \cdot \int_0^{\tau} d\tau$$

відповідно до таблиці інтегралів, знаходимо:

$$C = C_0 - k\tau \quad (1.2.4)$$

Тобто в координатах залежність $C = F(\tau)$ є пряма лінія для реакції нульового порядку $n=0$.



Якщо відомо, що за час напіврозпаду $C = 1/2C_0$, ми цей вираз підставимо у отримане рівняння і одержимо час напіврозпаду, тобто час,

у плинi якого вихiдна концентрацiя зменшиться в 2 рази.

$$\tau_{0.5} = \frac{C_0 - C}{k} = \frac{C_0}{2k}$$

Розв'язуючи рiвняння (1.2.3) для $n=1$, $n=2$, $n=3$, можливо дiстати вiповiднi розрахунковi рiвняння.

Так для реакцiї першого порядку $n=1$ можна отримати

$$\ln(C) = \ln(C_0) - k\tau$$

Вiдзначимо, що це рiвняння – це рiвняння прямої лiнii в координатах $\ln C = F(\tau)$. Час напiвропаду, тобто час, у плинi якого вихiдна концентрацiя зменшиться в 2 рази.

$$\tau_{0.5} = \frac{\ln C_0 - \ln C}{k} = \frac{\ln 2}{k}$$

Для реакцiї другого порядку $n=2$ можна отримати

$$\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = k\tau$$

Вiдзначимо, що це рiвняння – це рiвняння прямої лiнii в

координатах $\frac{1}{C} = F(\tau)$.

Для реакцiї третього порядку $n=3$ можна отримати

$$\frac{1}{2C^2} - \frac{1}{2(C_0)^2} = k\tau$$

Вiдзначимо, що це рiвняння – це рiвняння прямої лiнii в координатах $\frac{1}{C^2} = F(\tau)$.

Дано: Експериментальнi данi змiни концентрацiї за часом чотирьох хiмiчних реакцiй (для кожної є п'ять вимiрювань)

Визначити: Порядок i константу швидкостi реакцiї по експериментальним даним концентрацiї вихiдної речовини для кожної реакцiї. Розрахувати час напiвропаду. Розрахунки провести письмово.

ВКАЗІВКИ ДО РІШЕННЯ. Побудувати по експериментальним даним відповідні графіки. Один з них обов'язково буде пряма лінія, що дозволить визначити порядок реакції і по відповідним рівнянням розрахувати константу швидкості і час напіврозпаду.

Варіанти робіт для контрольного завдання 2

Варіант "1" Початкова концентрація $C_0=1.00000$ моль/л.

Час	10 хв.	20 хв.	30 хв.	40 хв.	50 хв.
реакція1	0.70675	0.70640	0.70605	0.70570	0.70535
реакція2	0.99800	0.99602	0.99404	0.99206	0.99010
реакція3	0.99700	0.99402	0.99104	0.98807	0.98511
реакція4	0.99600	0.99200	0.98800	0.98400	0.98000

Варіант "2" Початкова концентрація $C_0=2.00000$ моль/л.

Час	10 хв.	20 хв.	30 хв.	40 хв.	50 хв.
реакція1	1.40859	1.40303	1.39754	1.39212	1.38675
реакція2	1.98413	1.96850	1.95313	1.93798	1.92308
реакція3	1.98804	1.97614	1.96432	1.95257	1.94089
реакція4	1.99200	1.98400	1.97600	1.96800	1.96000

Варіант "3" Початкова концентрація $C_0=3.00000$ моль/л.

Час	10 хв.	20 хв.	30 хв.	40 хв.	50 хв.
реакція1	2.09325	2.06626	2.04030	2.01528	1.99117
реакція2	2.94695	2.89575	2.84630	2.79851	2.75229
реакція3	2.97312	2.94648	2.92008	2.89392	2.86799
реакція4	2.98800	2.97600	2.96400	2.95200	2.94000

Варіант "4" Початкова концентрація $C_0=4.00000$ моль/л.

Час	10 хв.	20 хв.	30 хв.	40 хв.	50 хв.
реакція1	2.74204	2.66312	2.59064	2.52377	2.46183
реакція2	3.87597	3.75940	3.64964	3.54610	3.44828
реакція3	3.95229	3.90514	3.85856	3.81254	3.76706
реакція4	3.98400	3.96800	3.95200	3.93600	3.92000

Варіант "5" Початкова концентрація $C_0=5.00000$ моль/л.

Час	10 хв.	20 хв.	30 хв.	40 хв.	50 хв.
реакція1	3.33333	3.16228	3.01511	2.88675	2.77350
реакція2	4.76190	4.54545	4.34783	4.16667	4.00000

реакція3 4.92556 4.85223 4.77999 4.70882 4.63872
реакція4 4.98000 4.96000 4.94000 4.92000 4.90000

Варіант "6" Початкова концентрація $C_0=6.00000$ моль/л.

Час 10 хв. 20 хв. 30 хв. 40 хв. 50 хв.

реакція1 3.84742 3.54540 3.30489 3.10752 2.94174
реакція2 5.59701 5.24476 4.93421 4.65839 4.41176
реакція3 5.89297 5.78784 5.68459 5.58319 5.48359
реакція4 5.97600 5.95200 5.92800 5.90400 5.88000

Варіант "7" Початкова концентрація $C_0=7.00000$ моль/л.

Час 10 хв. 20 хв. 30 хв. 40 хв. 50 хв.

реакція1 4.27115 3.81201 3.47490 3.21385 3.00399
реакція2 6.37523 5.85284 5.40958 5.02874 4.69799
реакція3 6.85453 6.71209 6.57260 6.43602 6.30227
реакція4 6.97200 6.94400 6.91600 6.88800 6.86000

Варіант "8" Початкова концентрація $C_0=8.00000$ моль/л.

Час 10 хв. 20 хв. 30 хв. 40 хв. 50 хв.

реакція1 4.60044 3.97621 3.55222 3.24017 2.99813
реакція2 7.09220 6.36943 5.78035 5.29101 4.87805
реакція3 7.81029 7.62507 7.44425 7.26771 7.09536
реакція4 7.96800 7.93600 7.90400 7.87200 7.84000

Варіант "9" Початкова концентрація $C_0=9.00000$ моль/л.

Час 10 хв. 20 хв. 30 хв. 40 хв. 50 хв.

реакція1 4.83983 4.05916 3.56481 3.21593 2.95280
реакція2 7.74527 6.79758 6.05653 5.46117 4.97238
реакція3 8.76025 8.52689 8.29974 8.07865 7.86344
реакція4 8.96400 8.92800 8.89200 8.85600 8.82000

Варіант "10" Початкова концентрація $C_0=10.00000$ моль/л.

Час 10 хв. 20 хв. 30 хв. 40 хв. 50 хв.

реакція1 5.00000 4.08248 3.53553 3.16228 2.88675
реакція2 8.33333 7.14286 6.25000 5.55556 5.00000
реакція3 9.70446 9.41765 9.13931 8.86920 8.60708
реакція4 9.96000 9.92000 9.88000 9.84000 9.80000

Додаткові варіанти робіт для контрольного завдання 2
отримати у викладача.

КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 3. Нелінійні моделі.

Чисельні методи виступають, як могутній засіб рішення практичних задач. При цьому варто мати на увазі, що фактор використання комп'ютерів не спрощує, а деколи ускладнює рішення питань у точності одержання результатів.

Дуже часто формулювання тієї або іншої задачі зводиться до рівняння

$$F(X)=0, \quad (1.3.1)$$

де $F(X)$ - нелінійне рівняння.

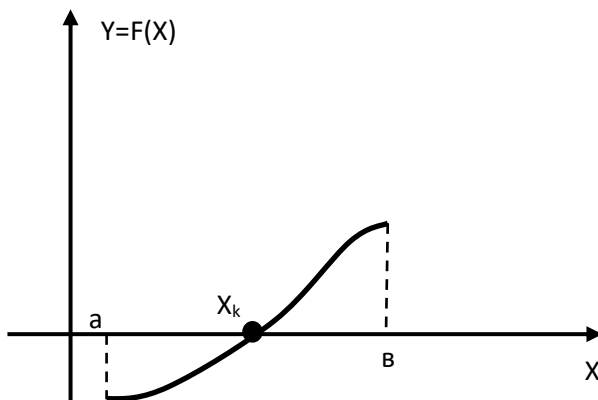
Нелінійне рівняння – це рівняння, куди входить x у ступенях $n \neq 1$, або це рівняння містить трансцендентні функції ($\sin(x)$, e^x , \ln).

Корінь рівняння – те значення x , при якому рівняння (1.3.1) перетворюється в тотожність.

Для знаходження коренів рівняння (2.3.1) складного виду (прим. $x^5 + \sin(X) - 10 = 0$, $x^7 + 100x - 57 = 0, \dots$) застосовуються чисельні методи.

Процес чисельного перебування коренів рівняння (1.3.1) складається з двох етапів:

1. Визначення коренів – визначення області або діапазону значень x -ов, де гарантовано є корінь рівняння.



При визначенні коренів достатньо виконання двох умов:

- $X_{\min}=a$, $X_{\max}=b$; $F(a) \cdot F(b) < 0$ – це умова перетинання графіка OX .
- $Y=F(X)$ – монотонна.

Тільки при виконанні цих двох умов визначається один корінь.

Функція $F(X)$ повинна мати першу і другу похідні на інтервалі $[a, b]$.

Методи рішення нелінійних рівнянь.

Метод простої ітерації.

Завжди можна довести, що рівняння (1.3.1) можна представити у вигляді

$$X = \varphi(X). \quad (1.3.2)$$

Легко довести переходи від (1.3.1) до (1.3.2). Взявши як початкове значення ікса $X = X_0$, який уже лежить у визначеному діапазоні $[a, b]$, можна організувати ітераційний процес за схемою:

$$X = X_0[a, b] \quad X_1 = \varphi(X_0), \quad X_2 = \varphi(X_1), \quad \dots, \quad X_{n+1} = \varphi(X_n). \quad (1.3.3)$$

(1.3.3) – нескінченний ітераційний процес. Він зупиняється за певних умов

$$X_{n+1} - X_n \leq \varepsilon.$$

Де ε - точність рішення.

Умова збіжності для методу ітерації: якщо для всіх іксів, що належать одному діапазону $[a, b]$, дотримується умова $|\varphi'(X)| < 1$, то рівняння (1.3.2) гарантовано зійдеться.

Метод Ньютона – метод дотичних;

Основи методу Ньютона для рішення нелінійних рівнянь.

Нехай нам необхідно вирішити рівняння (1.3.1).

Умови застосовності методу Ньютона:

1. Функція $F(X)$ безперервна в інтервалі $[a, b]$ зі своїми похідними.

2. $F(a)F(b) < 0$ – перетинання на осі X .

3. Знаки 1-ої та 2-ої похідної на інтервалі $[a, b]$ не міняються.

У цьому випадку ітераційний процес здійснюється по наступній формулі:

$$X_{n+1} = X_n - F(X_n)/F'(X_n). \quad (1.3.4)$$

Існують дві схеми процесу:

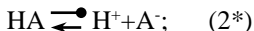
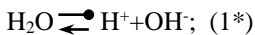
Схема А: Якщо $F'(X) F''(X) > 0$, то X_0 необхідно присвоїти значення b .

Схема В: Якщо $F'(X) F''(X) < 0$, то X_0 необхідно присвоїти значення a .

Умова закінчення процесу аналогічна умові методу простої ітерації.

Розглянемо задачу визначення водневого показника.

Показник рН є одним із важливих індикаторів існування водних біосистем. Вода і кислота дисоціюють на іони:



$$K_A = \frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-]}{\text{H}_2\text{O}}, \quad K_A = \frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{A}^-]}{\text{HA}} \quad 3^*$$

$$\text{HA} \rightleftharpoons [\text{H}^+] \cdot [\text{A}^-]. \quad (3a)$$

$$K_w = [\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-], \quad (4^*) \rightleftharpoons [\text{OH}^-] = K_w / [\text{H}^+]. \quad (4a)$$

$$[\text{HA}]_D = [\text{HA}] + [\text{A}^-]. \quad (5^*)$$

Розчин електроліту електронейтральний, тобто кількість «+» і «-» іонів повинні бути рівними. Запишемо рівняння балансу по зарядах:

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{A}^-]. \quad (6^*)$$

Якщо вираз для недисоційованої кислоти $[\text{HA}]$, отриманий з рівняння (3a), підставимо в рівняння (5*), то одержимо:

$$[\text{HA}]_D = [\text{H}^+] \cdot [\text{A}^-] / K_A + [\text{A}^-]. \quad (7^*)$$

Аналогічно підставимо вираз для $[\text{OH}^-]$ з рівняння (4*) і одержимо:

$$[\text{H}^+] = K_w / [\text{H}^+] + [\text{A}^-]. \quad (7a)$$

Звідси

$$[\text{A}^-] = [\text{H}^+] - K_w / [\text{H}^+]. \quad (8^*)$$

Підставимо в рівняння (7) (7a) та (8*), тоді:

$$[\text{HA}]_D = \frac{[\text{H}^+] \cdot ([\text{H}^+] - K_w / [\text{H}^+])}{K_A} + [\text{H}^+] - K_w / [\text{H}^+], \quad (9^*)$$

$$[\text{HA}]_D = \frac{K_A [\text{H}^+]^2 - K_w}{K_A} + [\text{H}^+] - K_w / [\text{H}^+], \quad (10^*)$$

Рівняння (10*) – це рівняння нелінійного типу щодо іонів водню.
Це рівняння третього порядку, що може бути вирішено методом ітерацій.

Умови завдання . Дано:

$[HA]_0=0,1$ моль/л; $K_w=10^{-14}$ – іонний добуток;

$X_0=0,01$ – початкове наближення;

$K_A=N*0,001$ – константа дисоціації ; N – номер варіанту.

Визначити:

Показник рН.

ВКАЗІВКИ ДО РІШЕННЯ.

1. Позначити $[H^+] = X$ і перетворити рівняння (10) до виду $X=\varphi(X)$.
2. Перевірити умови збіжності.
3. Скласти блок-схему обчислення.
4. Скласти комп'ютерну програму.
5. Розрахунки провести письмово . Відповідь зобразити у вигляді.

Номер ітерації | Значення X

1	0.00766
2	0.00707
3	0.00690
4	0.00685

Відповідь с точністю 0.0001 дорівнює 0.0068

pH= 2.1668277204E+00

У ході розрахунків ми одержали значення $X=0.0068$, отже концентрація іонів водню дорівнює $[H^+]=0,0068$. Звідси знаходимо рН кислоти:

$$pH = -\lg[H^+] = 2,1668277204 .$$

КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 4. Моделювання чисельності популяції.

Диференціальні рівняння – складова частина більшості математичних моделей. Розглянемо, як можна чисельно вирішити диференціальні рівняння.

$$\frac{d}{dx}y = f(x,y) \quad (1.4.1)$$

Знайти диференціал функції – це знайти $f(x,y)$, що задовольняє рівнянню (1.4.1). Для рішення даного рівняння потрібно врахувати початкові умови – значення функції при початковому значенні аргументу x_0 .

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.4.2)$$

Якщо y – чисельність популяції, x – час, то y_0 – це чисельність популяції в початковий момент часу. Знаходження рішення рівняння (1.4.1) з початковими умовами (1.4.2) називається задачею Коші.

Знайти рішення диференціального рівняння не завжди вдається аналітично. У таких випадках використовують чисельні методи. Розглянемо деякі з них.

МЕТОД ЕЙЛЕРА

Цей метод заснований на розкладанні функції в ряд Тейлора в околі точки x_0 :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \left(\frac{d}{dx} y \right)_{x_0} + \frac{1}{2h^2} \cdot \left(\frac{d}{dx^2} y^2 \right)_{x_0} + \dots$$

Тейлор довів, що в околі точки x_0 функцію можна представити у вигляді кінцевого ряду, задаючи деяким кроком – h . Якщо крок досить малий, то коренями ряду старших порядків можна зневажити. Тоді рівняння Тейлора прийме вид :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \left(\frac{d}{dx} y \right)_{x_0} \quad (1.4.3)$$

Обчислимо по формулі (5.1) значення похідної у точці x_0 :

$$\left(\frac{d}{dx} y \right)_{(x=x_0)} = f(x_0, y_0) \quad (*)$$

Тепер підставимо вираз (*) у рівняння (1.4.3) і одержимо :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h f(x_0, y_0)$$

Таким чином, можна одержати приблизне значення залежної перемінної в при зсуві h від початкової точки x_0 . Цей процес можна продовжити по співвідношенню.

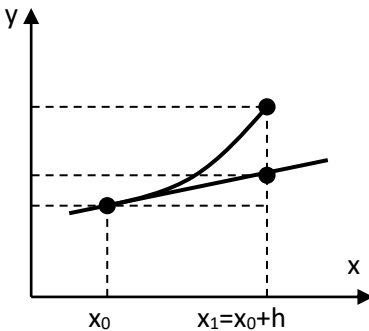
$$y_{N+1} = y_N + h * f(x_N, y_N)$$

Графічна інтерпретація методу Ейлера.

Суть рішення рівняння (1.4.1) зводиться до обчислення похідної dy/dx при $x=x_0$ і $f(x_0; y_0)$, а потім, задаючи мале збільшення $\Delta x=h$,

переходимо до нової точки $x_1=x_0+h$.

Положення нової точки у визначається по нахилі кривої, обчисленому по рівнянню (*); тобто графік чисельного рішення являє собою послідовність коротких прямолінійних відрізків, якими апроксимується істина крива $y=f(x)$.



МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕЙЛЕРА (ММЕ)

Хоча tg кута нахилу відомий, у вихідній точці він обчислюється по формулі (*), однак зі змінами x усередині кроку він змінюється, тому точність методу Ейлера можна істотно підвищити, поліпшивши апроксимацію похідної на початку і наприкінці інтервалу.

У ММЕ спочатку обчислюється значення функції по методу Ейлера :

$$(y^E)_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n),$$

яке використовується для наближеного обчислення похідної наприкінці інтервалу. Обчисливши середнє значення цієї похідної $f(x_{n+1}; y^E_{n+1})$ і $f(x_n; y_n)$, знаходимо більш точне значення u_{n+1} :

$$y_{n+1}^{MME} = y_n^{MME} + \frac{h}{2}(f(x_n; y_n^{MME}) + f(x_{n+1}; y_{n+1}^E))$$

Умови завдання .

Дослідити динаміку популяції за часом чисельним методом Ейлера і модифікованим методом Ейлера за допомогою наближення, в основі якого лежить проста, але в той же час фундаментальна модель Ферхюльта. Ця модель припускає, що народжуваність пропорційна чисельності популяції, а смертність – квадратів чисельності (перенаселення, недолік ресурсів). Даній моделі відповідає наступне диференціальне рівняння:

$$dP/dT = A * P - B * P^2.$$

Дано:

Стала A = 1; Стала B = 0,0001;

Початкова чисельність (P₀ = 10 + N) тис. осіб., де N - номер варіанту.

Крок за часом дорівнює h₁ = 0.1, h₂ = 0.05 сторіччя (Два варіанти)

Час дослідження : T₀ = 0, T_{max} = 1 сторіччя ;

Розрахуйте, як міняється чисельність популяції з спливанням часу T.

ВКАЗІВКИ ДО РІШЕННЯ.

1.Складіть ітераційні рівняння чисельних методів, зважаючи на те , що F(X,Y)= A * P - B * P².

2.Скласти блок-схему обчислення.

3.Скласти комп'терну програму.

4.Визначити точність розрахунків.

5. Розрахунки провести письмово та зобразити у вигляді.

Зразок рішення.

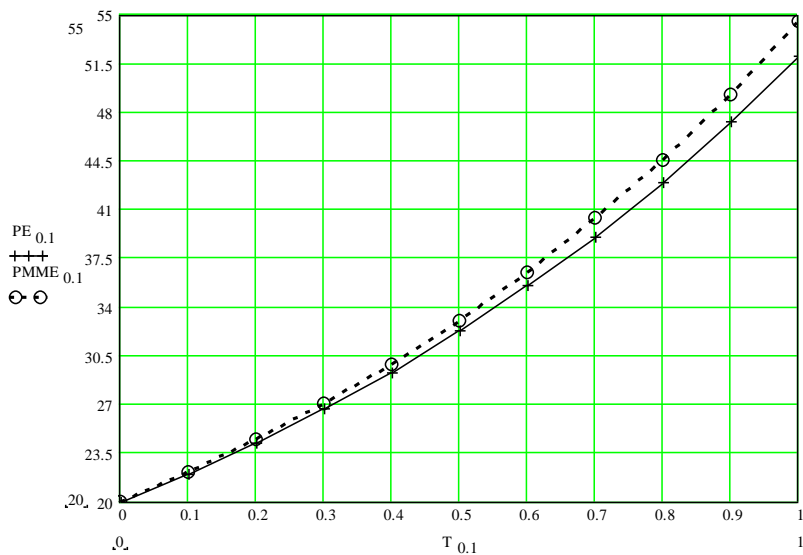
Варіант N= 0

Ном.іт.	P тыс. ед.		T століть
	ЕЙЛЕР	ММЕ	
0	10.0000	10.0000	0.00
1	10.9990	11.0488	0.10

2	12.0977	12.2076	0.20
9	23.5504	24.5263	0.90
10	25.8999	27.0946	1.00
-----кінець варіанту--h=0.10			

0	10.0000	10.0000	0.00
1	10.4995	10.5120	0.05
2	11.0239	11.0501	0.10
19	25.2328	25.8064	0.95
20	26.4913	27.1254	1.00
-----кінець варіанту--h=0.05			

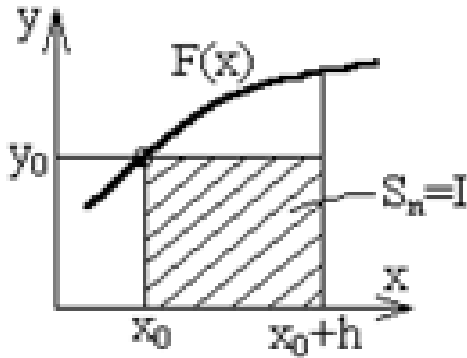
Побудуємо порівняльні графіки росту популяції, розраховані по моделі Ейлера і по модифікованій моделі Ейлера. Розрахунок зроблений у пакеті MathCad :



КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 5. Швидкість інфільтрації води в ґрунт.

Рішення багатьох екологічних задач примушує вирішувати складні інтеграли, які неможливо проінтегрувати аналітично.

Чисельне інтегрування (історична назва: (чисельна) квадратура) - обчислення значення визначеного інтеграла (як правило, наближене), засноване на тому, що величина інтеграла чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої віссю абсцис, графіком інтегровальної функції $y=F(x)$ і відрізками прямих $x = x_0$ і $x = x_0+h$, де x_0 і $x = x_0+h$, - межі інтегрування (див. малюнок).

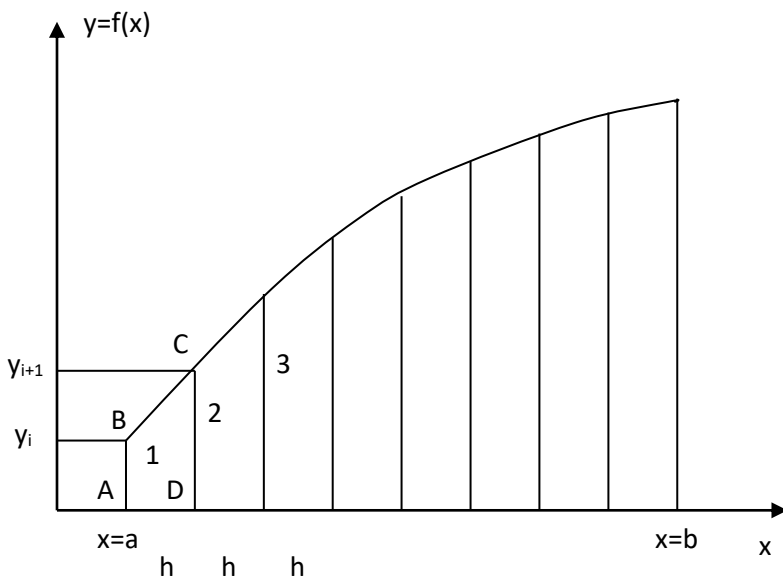


Загальний підхід :

Розіб'ємо інтервал $[a,b]$ на безліч маленьких інтервалів, знаходячи площу кожної криволінійної трапеції ABCD і підсумовуючи, одержуємо площу криволінійної трапеції.

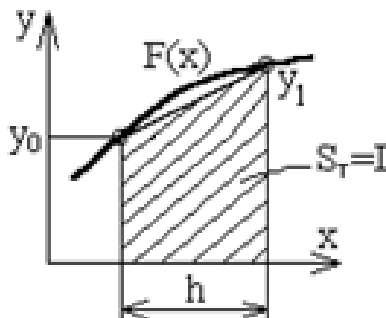
$$J = \int_a^b f(x) dx$$

$$J = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$$



Метод трапецій

Візьмемо певний інтеграл $\int f(x) dx$, де $f(x)$ - безперервна підінтегральною функцією, яку ми для наочності будемо припускати позитивною. При обчисленні інтегралу за допомогою формули трапецій підінтегральною функцією f замінюється функцією, графік якої являє собою ламану лінію. Таким чином відбувається заміна графіка функції $F(x)$ прямої, що проходить через дві точки (x_0, y_0) і (x_0+h, y_1) , і значення елемента інтегральної суми обчислюється як як площа прямокутної трапеції



Площа трапеції на кожному відрізьку:

$$I_i \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} (x_i - x_{i-1})$$

Похибка апроксимації на кожному відрізьку:

$$|R_i| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_{2,i}, \quad M_{2,i} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$$

Повна формула трапецій в разі поділу всього промізьку інтегрування на відрізьки однакової довжини h :

$$I \approx h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right), \quad h = \frac{b-a}{n},$$

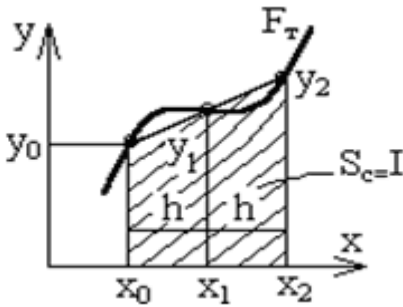
або

$$J \equiv \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Похибка формули трапецій:

$$|R| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Метод парабол (МЕТОД СИМПСОНА)



Правило Сімпсона.

Замінюємо графік функції $F(x)$ квадратичної параболою, що проходить через три точки з координатами (x_0, y_0) , (x_0+h, y_1) , (x_0+2h, y_2) .. Розрахункову формулу для обчислення елемента інтегральної суми отримуємо, використавши три точки відрізка інтегрування. Таким чином можна замінити подінтегральную функцію параболою. Звичайно в якості таких точок використовують кінці відрізка і його середню точку. У цьому випадку формула має дуже простий вигляд h :

$$I \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Якщо розбити інтервал інтегрування на $2N$ рівних частин, то маємо

$$I \approx \frac{b-a}{6N} (f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + f_{2N}),$$

$$f_i = f\left(a + \frac{(b-a)i}{2N}\right), \text{ або}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + y_{2n}]$$

Умови завдання .

Дано:

Швидкість інфільтрації води в ґрунт у залежності від часу в широкому діапазоні умов можна оцінити по співвідношенню :

$$\frac{dQ}{dT} = a + VT^{-\frac{1}{2}}, (*)$$

де :

$a = N$ мінімальна швидкість просочування (мм/година);

$V = 5.0$ – постійна, що характеризує вологість ґрунту;

T – час просочування (година); $T_n=0,1$; $T_k=N$. N - номер варіанту.

Визначити загальну кількість води Q (у мм), яка просочувалася у ґрунт за заданий проміжок часу.

ВКАЗІВКИ ДО РІШЕННЯ.

1. Аналітично проінтегрувати рівняння (*).
2. Складіть рівняння чисельних методів трапецій і Симпсона, зважаючи на те, що $F(X) = a + V \cdot T^{-1/2}$.
2. Скласти блок-схему обчислення.
3. Скласти комп'ютерну програму.
4. Здійснити розрахунки і визначити їх точність . Розрахунки провести письмово.

КУРСОВЕ ЗАВДАННЯ 6.

Важливим напрямком екологічного прогнозування є можливість створення стохастичної математичної моделі екосистеми, що намагається врахувати ефекти випадкової мінливості функцій. Статистичні методи планування експерименту дозволяють одержати рівняння регресії, тобто встановити зв'язок між випадковими величинами, що визначають властивості даної екосистеми. Розглянемо методи планування й обробки результатів екологічного експерименту для складання математичної моделі.

У результаті екологічного експерименту одержуємо набір взаємозалежних випадкових величин. Статистика дозволяє їх проаналізувати, установити взаємозв'язок між ними, оцінити похибку експерименту.

Регресійний аналіз – дозволяє знайти статистичний зв'язок між випадковими величинами, тобто кореляційну залежність.

Кореляційна залежність, на відміну від функцій залежності, – це зв'язок між двома випадковими величинами, при якому одна з них реагує на зміну іншої зміною свого математичного очікування.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Деякі властивості y залежать від цілого ряду інших характеристик x_i .

Статистичні методи планування експерименту є одними з емпіричних способів вивчення й одержання математичного опису моделі складних процесів. Вибір моделі складається з вибору функції, названої рівнянням регресії, що дозволить характеризувати ефективність об'єкта системи і проводити його оптимізацію.

У загальному випадку рівняння регресії має вигляд :

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i + \sum_{i=j}^k b_i b_j x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (1)$$

Де b – коефіцієнти регресії. Якщо x у першому степені, то це рівняння першого степеня і має вид :

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 + \dots \quad (2)$$

Модель повинна бути досить точною, тобто близькою до фізичної залежності. Тоді кажуть, що вона адекватна. Експериментальний об'єкт може представляти собою «чорний ящик», у якої входами є « k » керованих

факторів (x_1, x_2, \dots, x_k) на «q» рівнях кожен, а виходом – деяка невідома функція відгуку (функція оптимізації). Передбачається, що усіма факторами x_i ми можемо керувати з великою точністю. «Сірий ящик» - об'єкт, у якого вивчені лише деякі процеси усередині нього, але деяких відомостей недостатньо для повного знання про нього.

Планування, при якому реалізуються всілякі комбінації «k»-факторів на обраних «q»-рівнях зветься повним факторним експериментом (ПФЕ).

При ПФЕ кількість дослідів «n» визначається

$$n=q^k, \quad (3)$$

Для проведення ПФЕ проводяться такі попередні процедури :

- a. Вибирається центр плану – значення x у початковій точці

$$x_i=(x_{10}, x_{20}, \dots)...$$

- b. Визначається діапазон варіювання від центра плану по кожній перемінної : $\pm \Delta x_i$. Необхідною умовою вибору Δx є та обставина, що отримані значення y_i на різних рівнях повинні мати значимі (не випадкові) значення.

- c. Формуємо нові безрозмірні перемінні x . Позначимо його x_i бр

$$x_{i \text{ бр}} = \frac{x_i - x_0}{\Delta x_i}, \quad (4)$$

Очевидно, що безрозмірний фактор може приймати значення +1 або -1. Завдання полягає в тім, щоб одержати в результаті проведених експериментів лінійне рівняння регресії виду (1) Складемо ортогональну матрицю планування для трьох факторів

Матриця ПФЕ 2^3 .

N	X0	X1	X2	X3	X1*X2	X1*X3	X2*X3	X1*X2*X3	Y
1	+	-	-	-	-	+	+	-	
2	+	+	-	-	+	-	+	+	
3	+	-	+	-	-	+	-	+	
4	+	+	+	-	+	-	-	-	
5	+	-	-	+	-	-	-	+	
6	+	+	-	+	+	+	-	-	
7	+	-	+	+	-	-	+	-	
8	+	+	+	+	+	+	+	+	

Зміст матриці: кожен рядок відповідає умовам одного з 8-ми

експериментів і його результатів y_i .

Матриця лінійного планування має властивість ортогональності :

$$c_{ji} = \sum_{q=1}^n x_{qi} \cdot x_{qj} = 0, \quad i \neq j \quad (5)$$

З цієї властивості випливають властивості матриці :

а) Симетричність щодо центра експерименту, тобто алгебраїчна сума елементів векторів-стовпців кожного фактора дорівнює 0.

$$\sum_{i=1}^n x_{qi} = 0.$$

Де j – номер фактора; i – номер дослідів; n – число дослідів (у нас $n=4$).

Умова нормування: сума квадратів елементів кожного стовпця дорівнює числу дослідів.

$$\sum_{i=1}^n x_{qi}^2 = n$$

б) Ротатабельність матриці: точки в матриці планування підбираються так, що точність одержуваних експериментальних значень параметра оптимізації однакова на різних відстанях від центру експерименту і не залежить від напрямку.

Цією властивістю треба користуватися при складанні (правильності) плану експерименту і перевірки його правильності. Точність виміру y в усіх цих точках повинна бути приблизно однакова.

Якщо усі три умови дотримані, то можна записати, що b_j може бути обчислено :

$$B_j = \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij} y_i}{n}, \quad (6)$$

Де j – номер фактора (0,1,2,...,к)

Бексом було доведено, що ортогональне планування є оптимальним і коефіцієнти регресії володіють однаковою і мінімально можливою дисперсією, тобто дисперсія будь-якого коефіцієнта b_j дорівнює :

$$S_{bi}^2 = \frac{\sigma_y^2(y)}{n}. \quad (7)$$

Де $\sigma_y^2(y)$ є дисперсія відтворюваності експериментів.

$$\sigma_y^2(y) = \frac{\sum (y_i^0 - \bar{y})^2}{n_0 - 1}. \quad (8)$$

Далі проводять статистичний аналіз рівняння (1), куди входить :

- 1) Перевірка однорідності і розрахунок дисперсії відтворюваності ;
- 2) Перевірка значимості коефіцієнтів регресії (0-гіпотеза); визначити, які b_j можуть бути рівні 0.
- 3) Перевірка адекватності рівняння регресії експериментів.

Перевірка значимості й адекватності засновані на використанні критеріїв Стюдента та Фішера.

Умови завдання . Дано:

Нехай чисельність популяції морських бактерій визначається трьома факторами : температурою, солоністю і часом культивації.

Використовуючи отримані експериментальні значення за схемою повного факторного експерименту 2^3 , знайдіть рівняння регресії і виконайте його статистичний аналіз.

ВКАЗІВКИ ДО РІШЕННЯ.

Маємо набір 8-ми експериментальних значень y_i . Наприклад : 2, 6, 4, 8, 10, 18, 8, 12,

і трьох додаткових дослідів у центрі плану : 8, 9, 8,8.

Число можливих експериментів $n=2^3=8$. Складена матриця планування задовольняє всім умовам ортогональності. У результаті 8-ми проведених експериментів були отримані дані, занесені в графу «У». У цьому випадку трьохфакторне лінійне рівняння регресії має вигляд (2)

Розрахуємо коефіцієнти регресії B_i за формулою (6). Отримаємо $B_0 = 8.5$; $B_1 = 2.5$; $B_2 = -0.5$; $B_3 = 3.5$; $B_{12} = -0.5$; $B_{13} = -0.5$; $B_{23} = -1.5$; $B_{123} = -0.5$; Для перебування дисперсії відтворюваності скористаємося даними трьох додаткових дослідів у центрі плану :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} y_i^0}{n_0} = 8,6, \quad f_0 = n_0 - 1 - \text{число ступенів свободи.}$$

$$\sigma_y^2(\mathbf{y}) = 0,28.$$

$$\text{Середньоквадратична помилка } S_{bi} = \sqrt{\frac{0,28}{8}} \approx 0,2$$

Для оцінки значимості коефіцієнтів регресії складаємо критерій, що представляє собою наступне відношення :

$$t_i = \frac{|b_i|}{S_{bi}}, \text{ отримаємо } t_0 = 42,5; \quad t_1 = 12,5; \quad t_2 = 2,5; \quad t_3 = 17,5; \quad t_{12} =$$

$$2,5; \quad t_{13} = 2,5; \quad t_{23} = 7,5; \quad t_{123} = 2,5;$$

Порівняємо його з $t_{кр}$ – розподіл Ст'юдента (задається таблично) $t_{кр}(\alpha, f_1); \alpha$ - рівень значимості ($\alpha = 0,05 > 95\%$), f_1 – число ступенів свободи при визначенні дисперсії відтворюваності. По таблиці знаходимо критичне значення критерію Ст'юдента [16]. $t_{кр}(0,05; 2) = 4,3$.

Порівнюючи t з $t_{кр}$, ми бачимо, що : $t_2, t_{12}, t_{13}, t_{123} < t_{кр}$,

Тобто, коефіцієнти $B_2, B_{12}, B_{13}, B_{123}$ – статистично незначущі.

У такий спосіб шукана теоретична залежність має вигляд :

$$Y^T = 8,5 + 2,5 \cdot X_1 + 3,5 \cdot X_3 - 1,5 \cdot X_2 \cdot X_3; \quad (9)$$

Перевірка адекватності .

Перевіримо за допомогою критерія Фішера. Він оцінюється відношенням залишкової дисперсії і дисперсії відтворюваності :

$$\sigma_{\text{зал}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j^T - y_j^3)^2}{n-1} = 2,0, \quad F = \frac{\sigma_{\text{зал}}^2}{\sigma_{\text{відт}}^2} = 7,1,$$

Де n – число дослідів; l – число значимих коефіцієнтів. $f_{\text{ост}} = n - l = 8 - 4 = 4$. Критерій Фішера являє собою : $F(\alpha; f_{\text{ост}}; f_2) \Rightarrow F_{кр}(0,05; 4; 2) = 19,25$ [16]. Тобто, $F < F_{кр}$, отже, рівняння регресії адекватно експериментальним даним. Нульова гіпотеза вірна. Рівняння (9) можна застосувати для прогнозування поведінки даної популяції.

Варіанти робіт для контрольного завдання №6

№	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y01	Y02	Y03
1	8	11	9	13	15	23	13	17	13.1	14	13.7
2	13	16	14	18	20	28	18	22	18	18.9	18.8
3	17	21	19	23	25	33	23	27	23	24	24.7
4	22	26	24	28	30	38	28	32	28	29	28.8
5	28	31	29	33	35	43	33	37	33.2	34	33.5
6	32	36	34	38	40	48	38	42	38	39	38.8
7	37	41	39	43	45	53	43	47	43,1	44	43,7
8	42	46	44	48	50	58	48	52	48	49	48,8
9	47	51	49	53	55	63	53	57	53	52,5	54
10	53	56	54	58	60	68	58	62	58	59	58,8
11	58	61	59	63	65	73	63	67	63	64	64,7
12	62	66	64	68	70	78	68	72	68	69	69,6
13	67	71	69	73	75	83	73	77	73	74	73,7
14	72	76	74	78	80	88	78	82	78,1	79	78,5
15	77	81	79	83	85	93	83	87	83	84	83,7
16	83	86	84	88	90	98	88	92	88,2	89	88,4
17	4	10	8	12	14	22	12	16	12	13	12,8
18	9	15	13	17	19	27	17	21	16	16,8	17

Додаткові варіанти робіт для контрольного завдання 6 отримати у викладача.

Вибір варіанта завдання і оформлення роботи.

1. Курсова робота виконується в окремому зошиті формату А4. На першому аркуші вказується: найменування академії, інституту чи факультету, спеціальність, учбова дисципліна, а також прізвище, ім'я, по батькові студента, його учбовий шифр. Писати потрібно розбірливо, результати комп'ютерних розрахунків і програм можна додавати у вигляді комп'ютерних текстів. Розрахунки провести письмово.
2. Кожне питання завдання пишеться повністю.
3. У кінці роботи додається список використаної літератури.
4. Номери варіанту вказує викладач.

Додаткові завдання для самостійної роботи.

Задача розрахунку промерзання ґрунту.

Можливість промерзання ґрунту треба враховувати при вирішенні завдань інженерної екології (прокладання водопровідних мереж, функціонування ґрунтового біоценозу і т.д.). Незважаючи на складність структури ґрунту і погодних умов, можна отримати прийнятні рішення, ґрунтуючись на припущенні, що ґрунт є однорідний у всіх напрямках. У цьому випадку температура в градусах Цельсія $T(x, t)$ на глибині x (в метрах) через t секунд після початку різкого похолодання наближено визначається за формулою

$$(T(x,t) - T_s) / (T_i - T_s) = \operatorname{erf} \left(x / (2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot t}) \right)$$

де T_s - постійна температура на поверхні протягом холодного періоду, T_i - початкова температура ґрунту перед похолоданням, α - коефіцієнт теплопровідності ґрунту (в $\text{м}^2/\text{с}$).

Інтегральна функція ймовірності розподілу звичайно виражається через спеціальну функцію $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Припустимо, що $T_i = 20^\circ\text{C}$, $T_s = -15^\circ\text{C}$, $\alpha = 0,138 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Визначте на яку глибину ґрунт промерзне за 60 днів? Нагадаємо, що вода замерзає при 0°C .

Рекомендація: Застосувати чисельний метод розв'язання нелінійного рівняння.

Екосистема «Кролики-лисиці».

Розглянемо просту екосистему, що складається з кроликів, для яких запас їжі необмежений, і лисиць, які для прожитку полюють на кроликів.

Класична математична модель, що належить Вольтерра, описує цю систему двома нелінійні диференціальними рівняннями першого порядку:

$$\begin{aligned} dr/dt &= 2 \cdot r - a \cdot r \cdot f, & r(0) &= r_0, \\ df/dt &= -f + a \cdot r \cdot f, & f(0) &= f_0. \end{aligned}$$

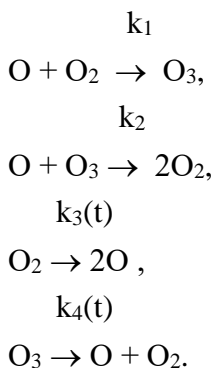
Тут t -час, $r = r(t)$ - кількість кроликів, $f = f(t)$ - кількість лисиць і a - позитивна константа. При $a = 0$ дві популяції не взаємодіють, і кролики роблять те, що у кроликів виходить найкраще, а лисиці вимирають від голоду, У $a > 0$ лисиці зустрічають кроликів з ймовірністю, пропорційною добутку числа тих і інших. У результаті таких зустрічей число кроликів з очевидних причин зменшується, а кількість лисиць по менш очевидним причинам зростає. Дослідіть поведінку цієї системи для $a = 0.01$ і різних початкових значеннях r_0 і f_0 . Намалуйте графіки найбільш цікавих рішень. Накресліть також графік з осями r і f . Оскільки ми умовчуємо про одиниці вимірювання, немає причин обмежувати r і f тільки цілими значеннями.

а) Розрахуйте рішення для $r_0 = 300$ і $f_0 = 150$. Ви повинні виявити, що поведінка системи періодично. Визначте значення періоду?

б) Розрахуйте рішення для $r_0 = 15$ і $f_0 = 22$. Визначте період за який кролики вимруть. Визначте початкові умови, які прирікають на вимирання лис. Знайдіть початкові умови з $r_0 = f_0$, при яких вимирають обидва види.

Озон в атмосфері.

Досліджуємо просту модель озону в атмосфері. Припустимо, що атмосфера Землі являє собою замкнуту систему з незмінними температурою і об'ємом, і розглянемо одночасне взаємодія трьох реагентів: вільного кисню O , озону O_3 і молекулярного кисню O_2 . Механізм реакцій цих речовин такий:



Запис $k_3(t)$ і $k_4(t)$ означає, що у цих двох констант швидкості

значення змінюються з часом. Це викликано тим, що останні дві реакції описують вплив сонячного світла, під впливом якого молекулярний кисень і озон «фотодисоціюють». Ця модель базується на досить спірних припущеннях, зокрема на припущенні, що концентрації не залежать від висоти. Як би там не було, описаний вище процес дозволяє записати диференціальні рівняння.

$$[O]' = k_1[O][O_2] - k_2[O][O_3] + 2k_3(t)[O_2] + k_4(t)[O_3]$$

$$[O_3]' = k_1[O][O_2] - k_2[O][O_3] - k_4(t)[O_3]$$

Оскільки значення $[O_2]$ на багато порядків більше концентрацій $[O]$ і, ми можемо припустити, що на концентрацію молекулярного кисню два інших реагенту істотного впливу не роблять і її можна вважати постійною за часом. Ось чому ми ігноруємо відповідне диференціальне рівняння. Значення констант k_1 і k_2 відомі:

$$k_1 = 1.63 \cdot 10^{-16} ; \quad k_2 = 4.46 \cdot 10^{-16} ;$$

Дві інші константи швидкостей змінюються двічі на добу; вони описуються формулами

$$k_i(t) = \begin{cases} \exp(-C_i / \sin(\omega t)), & \sin(\omega t) > 0 \\ 0, & \sin(\omega t) \leq 0, \end{cases} \quad i = 3, 4,$$

в яких $\omega = \pi / 43200 \text{ с}^{-1} (= \pi \cdot 12 \text{ ч}^{-1})$, $C_3 = 22.62$; $C_4 = 7.601$. Значення k_3 і k_4 різко зростають на «світанку» ($t = 0$), досягають максимуму в «полудень» ($t = 6 \cdot 3600 \text{ с.}$) і падають до нуля «на заході сонця» ($t = 12 \cdot 3600 \text{ с.}$). Час вимірюється в секундах. Розумно взяти наступні початкові значення: [14]

$$[O](0) = 10^6 \text{ см}^{-3}, [O_3](0) = 10^{12} \text{ см}^{-3}, [O_2](0) = 3.7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}.$$

Дослідіть залежності концентрацій протягом півтори доби.

РЕКОМЕНДАЦІЇ: Ця система є жорсткою на інтервалах відповідних ночі, наприклад при $12 \leq t/3600 \leq 24$ год. При інтегруванні на

інтервалах денного часу для отримання доброго розділювання потрібно малий крок інтегрування, тут рівняння можна вирішувати будь яким нежорстких методом розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь . Тим не менше рівняння виявляються все ж помірно жорсткими, тому краще скласти програму жорсткого інтегрування. Розглянута задача характеризується двома власними значеннями $\lambda_1 \approx -6.03$ (завжди) і λ_2 , яке визначає швидкість зміни системи. Модуль λ_2 зростає до полудня і, коли прискорюється хід реакцій, а до заходу сонця - зменшується. Вночі λ_2 дорівнює машинному нулю, але протягом дня стає негативним і досягає значення $(-1.6 * 10^{-7})$. Хоча завдання є тільки простий моделлю, але її не можна було вирішити, поки не з'явилися програми вирішення жорстких диференціальних рівнянь [10].

Література .

1. Богобоящий В. В., Курбанов К. Р., Палій П. Б., Шмандій В. М. Принципи моделювання та прогнозування в екології. Київ : Центр навчальної літератури, 2004. 216 с.
2. Быков А. А. Моделирование природоохранной деятельности: уч. пособие. Москва : НУМЦ Госкомэкологии России, 1998 202 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - Москва : Высшая школа, 1998. 319 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології. Київ : Фітоцентр, 1998. 225 с.
5. Михайлик Ю. Б. Математические основы повышения точности прогнозирования количественных характеристик процессов (в технике, экономике, экологии, социологии, бизнесе). Москва : Научтехлитиздат, 2000. 302 с.
6. Смит Дж. Модели в экологии. Москва : Мир, 1976. 298 с.
7. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем. Искусство и наука. Москва : Мир, 1978. 305 с.
8. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. Москва : Наука, 1985. 189 с.
9. Ляшенко І. М., Коробова М. В., Столяр А. М. Основи

математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів : навч. посіб. Тернопіль : Навч. кн.Є Богдан, 2006. 304 с.

10. Добровольський В. В. Основи теорії екологічних систем : навч. посіб. Київ : ВД -Професіонал», 2005. 272 с.

11. Боровков А. А. Теория вероятностей: учеб. пособ. Москва : Наука, 1986. 432 с.

12. Асатурян В. И. Теория планирования эксперимента. Москва : «Радио и связь», 1983. 180 с.

Додаток1. Комп'ютерна програма чисельного рішення нелінійного рівняння

Д1.1 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ $X = F(X)$ МЕТОДОМ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ

У програмі знаходиться ненульовий корінь рівняння $x = F(x)$ методом простої ітерації з відносною точністю ε . За i -м наближенням кореня знаходиться $i + 1$ наближенням за формулою

$$x_{i+1} = F(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots (1)$$

Процес продовжується доти, доки відносна похибка для двох послідовних наближень не стане меншою ε

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Процес ітерації збігається на $[a, b]$, якщо

$$\left| F'(x) \right| < 1 \quad \text{і} \quad \forall x \in (a, b). \quad (3)$$

У програмі використовуються змінні. X – початкове наближення кореня, на виході – значення кореня; n – максимально допустиме число

ітерацій; ϵ – відносна похибка; i – змінна циклу. $s = False$, якщо після n ітерацій не досягнута задана точність і $s = True$ у противному разі.

Контрольні приклади. Для рівняння $x = e^x - 2$ і початкового наближення $x = -1$ один з двох коренів, а саме той, де $|F'(x)| = e^x < 1$, $x_1 = -1.84140566$. Другий корінь $-x_2 = 1.14619322$.

Функція $jj(x)$ має вигляд:

```
FUNCTION  $jj$  (x: Real) : Real;
```

```
BTGIN  $jj$  : =Exp (x) -2 END;
```

Структура програми. Не вимагає додаткових пояснень.

Програма Д.1.1 Проста ітерація

```
PROCEDURE iter (VAR x: Real; n: Integer; e: Real; VAR s: Boolean);
```

```
VAR i : integer;
```

```
BEGIN
```

```
S: = True;
```

```
FOR i: = 1 TO n DO
```

```
    BEGIN
```

```
    IF Abs (  $jj$  (x) - x) < e * Abs (x) THEN Exit;
```

```
    x: =  $jj$  (x)
```

```
END;
```

```
s: = False
```

```
    END;
```

Додаток 2 Комп'ютерні програми чисельного інтегрування

Д 2.1 ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ СІМПСОНА З ОЦІНКОЮ ТОЧНОСТІ

Власне значення визначеного інтеграла

$$S = \int_a^{-b} j(x) dx$$

можна знайти методом Сімпсона (парабол). Для цього відрізок $[a, b]$ розбивається на $n = 2m$ частин точками $x_0 = a, x_1 = a+h, \dots, x_n = b$, з кроком

$$h = (b - a) / n.$$

У точках x_i обчислюють значення функції $y_i = f(x_i)$ і знаходять наближене значення інтеграла за формулою Сімпсона (10)

$$S = S_n + R_n,$$

Де

$$S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + y_{2m}), \quad R_n = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^{2m} y^{IV}(\xi_k) \in (x_{k-1}, x_k).$$

Далі кількість точок розбиття подвоюється і здійснюється оцінка точності обчислень [10]

$$|R_{2n}| \approx \frac{|S_{2n} - S_n|}{15}. \quad (3)$$

Якщо $|R_{2n}| > \epsilon$, то кількість точок розбиття знову подвоюється.

При цьому значення суми $2(y_1 + y_2 + \dots + y_{2m-1})$ у попередніх точках розбиття зберігається, тому для обчислення інтеграла при подвоєнні кількості точок розбиття треба обчислювання значення $u(x)$ лише в нових точках .

У програмі використовуються змінні: a, b, - межі інтегрування; ε - точність; x – аргумент функції f(x); h – крок; s, s1, s2, s3 – робочі змінні; x1=x_i+h.

Контрольний приклад.

$$\text{Інтеграл} \int_2^0 e^x dx = 1 - e^2 \approx -6.389056099 \dots$$

Функція ff(x) має вигляд:

FUNGNION ff(x: Real):Real;

BEGIN ff:=Exp(x) END;

Структура програми. Заголовок функції та опис локальних змінних; далі – обчислення за формулами (2) і (3).

Програма Д2.1. Інтеграл за Сімпсоном

FUNCNSON simpson (a,b,e:Real):Real;

VAR h, s, s1, s2, s3, x, x1 : Real;

BEGIN

s2:=1E+30; h:=b-a; s:=ff(a)+ff(b);

BEPEAT

S3:-s2; h: = h/2; s1: = 0; x1:=a+h;

WHILE (x1>b)=(h<0) DO

BEGIN s1:=s1+2*ff(x1); x1:=x1+2*h END;

S: = s+s1; s2: = (s+s1)*h/3; x: = Abs(s3-s2)/15

UNTIL x<e;

Simpson: = s2

END;

Д 2.2. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА МЕТОДОМ СІМПСОПНА ВІД ФУНКЦІЇ ЗАДАНОЇ ТАБЛИЧНО

Якщо у рівновіддалених точках проміжку [a, b] задані значення функції $y_i = f(x_i)$, $(i = \overline{1, n+1}; n - \text{à} \delta \text{à})$, то наближене

значення інтеграла обчислюється за формулою.

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx 2 \frac{b-a}{3n} (y_1/2 + 2y_2 + y_3 + \dots + y_{n+1}/2). \quad (4)$$

У програмі використовуються змінні: a, b – межі інтегрування; y – масив значень функції; n – число поділів проміжку; i, s – робочі змінні.

Контрольний приклад. При n = 4 обчислено інтеграл з п. Д2.1. за значеннями F(x) у п'яти точках. В результаті S = -6.39129431.

Структура програми. Не вимагає додаткових пояснень.

Програма Д2.2. Інтеграл за Сімпсоном від таблично заданої функції

```
CONST dim = 100;
```

```
TYPE ar = ARRAY [1...dim] OF Real;
```

```
FUNCTION simptab (n:Integer; a,b:Real; y:ar):Real;
```

```
VAR i:Integer;
```

```
s:Real;
```

```
BEGIN
```

```
s:=(y[1]-y(n+1))/2; i:= 3;
```

```
WHILE i <= n+1 DO
```

```
  BEGIN s:= s+2*y[i-1]+y[i]; i:= i + 2 END
```

```
  simptab:= 2*(b-a)*s/3/n
```

```
END;
```

Д.2.3 ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА МЕТОДОМ РОМБЕРГА

Обчислення визначеного інтеграла методом Ромберга полягає в тому, що задається деяке початкове число n розбиття проміжку [a, b] і здійснюється обчислення наближеного значення інтеграла за формулою трапецій.

$$S_0^{(1)} = \frac{b-a}{n} (y_0/2 + y_1 + y_2 + \dots + y_n/2)$$

(5)

(на використання формули трапецій вказує верхній індекс в $S_0^{(1)}$, нуль вказує на початкове розбиття проміжку $[a, b]$).

Застосування формули трапецій означає, що на відрізьку $[x_i, x_{i+1}]$ значення функції $y = j(x)$ інтерполюється прямою лінією, яка проходить через точки (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}) . Далі число точок розбиття проміжку $[a, b]$ подвоюється ($n := 2n$) і обчислюється наближене значення інтеграла за формулою трапецій $S_1^{(1)}$, причому значення підінтегральної $j(x)$ обчислюється лише в нових точках розбиття. На k -му кроці обчислення за формулою трапецій виконується на основі рекурентного співвідношення.

$$S_k^{(1)} = \frac{1}{2} S_{k-1}^{(1)} + \frac{b-a}{n \cdot 2^k} \cdot \sum_{j=1}^{n \cdot 2^k} j \left(a + \frac{2j-1}{n \cdot 2^k} \cdot (b-a) \right).$$

(6)

При кожному значенні k після обчислення $S_k^{(1)}$ послідовно обчислюються значення інтеграла за формулою Сімпсона $S_k^{(2)}$, за формулою Боде $S_k^{(3)}$ і далі $S_k^{(4)}, \dots, S_k^{(k+1)}$. На кожному кроці функція $j(x)$ інтерполюється відповідно параболою (верхній індекс 2), поліномами Лагранжа вищих порядків. При цих обчисленнях застосовується рекурентна формула

$$S_k^{(j)} = S_k^{(j-1)} + \frac{1}{4^j - 1} \left(S_k^{(j-1)} - S_{k-1}^{(j-1)} \right), \quad (7)$$

Обчислення за формулами (6) і (7) продовжуються доти, доки при деякому k не дістанемо

$$\left| S_{k-1}^{(k)} - S_k^{(k+1)} \right| < \varepsilon. \quad (8)$$

Нижче наведено дві програми обчислення інтеграла за Ромбергом. У першій з них початкове значення кількості точок поділу відрізка $[a, b]$ є $n = 1$, у другій програмі число n задається як вхідний параметр. У програмах всі величини $S_k^{(j)}$ розділені на $(b-a)$.

У програмах використовуються змінні: a, b – межі інтегрування; e, n – точність і початкова кількість точок розбиття $[a, b]$; $h = (b-a)/n$; t – масив, в якому запам'ятовуються наближені значення інтеграла $S_k^{(j)}$; $m, t1, s$ – робочі змінні; i, j змінні циклів.

Контрольний приклад. При $n = 4$ і $\varepsilon = 10^{-6}$ обчислено інтеграл

$$\int_1^2 \ln(x) dx = 0.386294361. \quad \text{Точне значення } 0.38629436\dots$$

Функція $jj(x)$ має вигляд:

```
FUNCTION jj(x:Real):Real;
```

```
BEGIN jj:=Ln(x) END;
```

Структура програм. Заголовок функції та опис локальних змінних; далі – обчислення за формулою трапецій (6); (у другій програмі) – обчислення за (7).

Програма Д2.3. Інтеграл за Ромбергом при $n = 1$

```
FUNCTION ramberg (a, b, e:Real):Real;
```

```
VAR i, j, m, n:Integer;
```

```
s, h, t1:Real;
```

```
t:ARRAY [1...10] OF Real;
```

```
BEGIN
```

```
n:=1; h:=b-a; i:=0; e:=e/h; t[1]:=(jj(a)+jj(b))/2;
```

```
REPEAT
```

```
t1 := t[1]; s:=0; n:=2*n; h:=h/2; j:=1; i:=i+1;
```

```

WHELE j<n DO
BEGIN s:=s+jj(a+j*h); j:=j+2 END;
t[i+1]:=s/n+t[i]/2; m:=1;
FOR j:=i DOWNTO 1 DO
BEGIN m:=4*m; t[j]:=t[j+1]+(t[j+1]-t[j])/(m-1) END;
UNTIL Abs(t1-t[1])<e;
romberg:=t[1]*(b-a)
END;

```

Програма Д2.4. Інтеграл за Ромб ергом із заданням n

```

FUNCTION romberg_n(a, b, e:Real; n:Integer):Real;
VAR i, j, m:Integer;
s, h, t1:Real;
t:ARRAY [1...10] OF Real;
BEGIN
s:=(jj(a)+jj(b))/2; h:(b-a)/n;
FOR i:=1 TO n-1 DO s:=s+jj(a+h*i);
i:=0; e:=e/(b-a); t[1]:=s/n;
REPEAT
t1:=t[1]; s:=0; n:=2*n; h:=h/2; j:=1; i:=i+1;
WHILE j<n DO
BEGIN s:=s+jj(a+j*h); j:=j+2 END;
t[i+1]:=s/n+t[i]/2; m:=1;
FOR j:=i DOWNTO 1 DO
BEGIN m:=4*m; t[j]:=t[j+1]+(t[j+1]-t[j])/(m-1)END
UNTIL Abs(t1-t[1])<e;
Romberg_n:=t[1]*(b-a)
END;

```